§3.4. Ерекшелігі әлсіз ядролы интегралдық теңдеулер

1. Фредгольм теңдеуі. Ақырлы $D\subset R^m$ облысында көп аргументті теңдеу қарастырайық:

$$\varphi(x)=\lambda\int_D K(x,s)\varphi(s)ds, \qquad (38)$$

$$K(x,s)=\frac{H(x,s)}{|x-s|^{\alpha}},\ 0\le\alpha\le m,\ H(x,s)\in C(D\times D). \qquad (39)$$

(38) түріндегі теңдеуді ерекшелігі әлсіз ядролы интегралдық теңдеу, ал (39) түріндегі ядроны ерекшелігі әлсіз немесе полярлық ядро деп атайды. Егер $\alpha<\frac{m}{2}$ болса, онда $K(x,s)$ Фредгольм ядросы деп аталады. Расында, $\alpha<\frac{m}{2}$ болған жағдайда

$$\int_D|K(x,s)|^2ds=\frac{c^2|S_1|h^{m-2\alpha}}{m-2\alpha}<\infty$$

Мұндағы, S_1 болса R^m кеңістігіндегі радиусы бірге тең сфера бетінің ауданы, ал h болса D облысының диаметрі. $|H(x,s)|\le c<\infty$ болғандықтан,

$$\int_D|K(x,s)|^2ds\le c^2\int_D\frac{ds}{|x-s|^{2\alpha}}\le c^2\int_{|x-s|\le h}\frac{ds}{|x-s|^{2\alpha}}$$

орынды. Бұл соңғы интегралда центрі x нүктесінде болатын сфералық координаталарға көшсек және $ds=r^{m+1}drdS_1$ екенін ескерсек,

$$\int_D|K(x,s)|^2ds\le c^2\int_{|x-s|\le h}\frac{ds}{|x-s|^{2\alpha}}=c^2\int_0^h\int_{S_1}\frac{r^{m-1}}{r^{2\alpha}}drdS_1=c^2\frac{|S_1|h^{m-2\alpha}}{m-2\alpha}.$$

1 лемма. Ерекшелігі әлсіз ядролы K интегралдық операторы C(D) кеңістігін тағы да C(D)-ға , ал $L_2(D)$ кеңістігін тағы да сол $L_2(D)$ кеңістігіне бейнелейді:

$$\|\mathrm{K}f\|_c\le N\|f\|_c,\ N=\max_{x\in\bar{D}}\int_D|K(x,s)|ds,$$

$$\|\mathrm{K}f\|_{L_2}\le\sqrt{NN^*}\|f\|_{L_2},\ N^*=\max_{S\in\bar{D}}\int_D|K(x,s)ds|.$$

Дәлелдеуі. Алдымен

$$\int_{\omega_\delta}\frac{ds}{|x-s|^{\alpha}}\le c_\alpha\delta^{n-\alpha},\ \forall x\in R^m \qquad (40)$$

теңсіздігін дәлелдейік. Бұл теңсіздіктегі ω_δ радиусы δ болған шар. Расында, егер $|x| \geq 2\delta$ болса, онда $|x-s| \geq |x|-|s| > \delta$ теңсіздігі барлық $|s| \leq \delta$ мәндерінде орынды, сондықтан

$$\int_{\omega_\delta} \frac{ds}{|x-s|^\alpha} \leq \frac{1}{\delta^\alpha} \int_{\omega_\delta} ds = \frac{1}{\delta^\alpha} \int_0^\delta dr \int_{S_1} r^{n-1} dS_1 = \frac{\delta^{n-\alpha}}{n} |S_1|.$$

Егер де $|x| \leq 2\delta$ болса, онда $|x-y| \leq |x|+|y| \leq 3\delta$ және

$$\int_{\omega_\delta} \frac{ds}{|x-s|^\alpha} \leq \int_{\omega_{3\delta}} \frac{d\xi}{|\xi|^\alpha} = \frac{(3\delta)^{n-\alpha}}{n-\alpha} |S_1|,$$

демек, (40) теңсіздігі дәлелденді.

$f \in C(D)$ болсын. Ол кезде

$$(\mathrm{K}f)(x) = \int_D K(x,s) f(s) ds = \int_D \frac{H(x,s)}{|x-s|^2} f(s) ds$$

D облысында үзіліссіз функция болады. $\forall x_0 \in \overline{D}$ нүктесін бекітіп және $\forall \varepsilon > 0$ деп алайық. Сонда

$$\left|(\mathrm{K}f)(x) - (\mathrm{K}f)(x_0)\right| \leq c \int_{\omega_\delta(x_0)} \left| \frac{1}{|x-s|^\alpha} + \frac{1}{|x_0-s|^\alpha} \right| ds + c \int_{D \setminus \omega_\delta(x_0)} \left| \frac{1}{|x-s|^\alpha} + \frac{1}{|x_0-s|^\alpha} \right| ds.$$

Бұл өрнектің оң жағындағы бірінші интеграл (40) теңсіздігіне байланысты $2CC_\alpha \delta^{n-\alpha}$ шамасынан үлкен бола алмайды, ендеше δ-ны жеткілікті дәрежеде кішірейтіп, бірінші интегралды $\frac{\varepsilon}{2}$-ден кіші етуге болады. Ал екінші интеграл астындағы өрнектер $|x-x_0| < \frac{\delta}{2}$ мен $|x_0-s| \geq \delta$ облыстарында (x,s) аргумент-тері бойынша бірқалыпты үзіліссіз, сондықтан барлық, $x \in \omega_{\delta/2}(x_0)$ үшін ол интегралды әрқашан $\frac{\varepsilon}{2}$-ден кіші етуге болады. Демек, барлық $|x-x_0| < \frac{\delta}{2}$ үшін $|(\mathrm{K}f)(x) - (\mathrm{K}f)(x_0)| < \varepsilon.$

Бұл $\forall x_0 \in \overline{D}$ нүктесінде $(\mathrm{K}f)(x)$-тің үзіліссіз екенін көрсетеді, яғни $\mathrm{K}f(x) \in C(\overline{D})$. Олай болса,

$$\|\mathrm{K}f\|_C = \max_x \int_D |K(x,s) f(s)| ds \leq \|f\|_C \max_x \int_D |K(x,s)| ds = N \|f\|_C$$

теңсіздігі орынды.

Енді $f \in L_2(D)$ болсын. Коши-Буняковский теңсіздігін пайдалансақ,

$$\|\mathrm{K}f\|^2_{L_2} = \int_D |\mathrm{K}f|^2 ds = \int_D \left|\int_D K(x,s)\, f(s) ds\right|^2 dx \le \int_D [\int_D \sqrt{|K(x,s)|}\cdot\sqrt{|K(x,s)|}\cdot|f(s)| ds]^2 dx \le$$

$$\le \int_D \left\{\int_D |K(x,s)| ds \int_D |K(x,s)|\cdot|f|^2 ds\right\} dx \le N \int_D \left(|f|^2 \int_D |K| dx\right) ds \le NN^* \int_D |f|^2 ds = NN^* \|f\|^2_{L_2}.$$

Бұл K операторының $L_2(D)$ кеңістігін $L_2(D)$-ға бейнелейтінін көрсетеді.

Осы дәлелдеген лемманы және өткен параграфтағы тұжырымдарды пайдалансақ, ерекшелігі әлсіз ядролы (38) интегралдық теңдеуінің шектелген $\overline{D}\times\overline{D}$ облысында кез келген $f \in C(\overline{D})$ және $|\lambda| < \dfrac{1}{N}$ болғанда Нейман қатары түріндегі жалғыз шешімі бар болады, ол қатар $\overline{D}$ облысында бірқалыпты жинақты.Сонымен бірге жоғарыдағы ерекшелігі әлсіз (39) ядролы (38) интегралдық теңдеуін ядросы шектелген эквивалентті интегралдық теңдеумен ауыстырып шешуге болады.

Алдымен мына лемманы дәлелдейік.

2 лемма. Егер $K_i(x,s) = \dfrac{A_i}{|x-s|^{\alpha_i}}$, $\alpha_i < m$, $i = 1,2$ болып және $D \subset R^m$ шектелген облыс болса, онда

$$K_3(x,s) = \int_D K_2(x,t) K_1(t,s) dt \tag{41}$$

полярлық ядро, оның үстіне

$$K_3(x,s) \le \begin{cases} \dfrac{A_3}{|x-s|^{\alpha_1+\alpha_2-m}}, & \alpha_1+\alpha_2 > m, \\ A_4 \ln|x-s| + A_5, & \alpha_1+\alpha_2 = m, \\ \overline{D}\times\overline{D}\ \text{облысында үзіліссіз}, & \alpha_1+\alpha_2 < m \end{cases} \tag{42}$$

болады.

Дәлелдеуі. Егер $\alpha_1+\alpha_2 < m$ болса, $\int_D K_2(x,t)K_1(t,s)dt$ интегралының кез келген $\forall x,s \in \overline{D}$ үшін бірқалыпты жинақты екені түсінікті, сондықтан $K_3(x,s)$ядросы $\overline{D}\times\overline{D}$ облысында үзіліссіз. Лемманы толық дәлелдеу үшін $\alpha_1+\alpha_2 \ge m$ болғанда (42) теңсіздігін дәлелдейік.(41) ядросын бағалау нәтижесінде

$$|K_3(x,t)| = A_1 A_2 \int_D \frac{dt}{(x-t)^{\alpha_2}(t-s)^{\alpha_1}},\ \forall x,s \in D$$

екенін аламыз. Бұл теңсіздікке $\eta = x - t$ ауыстыруын енгізіп, D облысын диаметрі h болған $\omega_h(x)$ шарына ауыстырсақ,

$$|K_3(x,s)| \le A_1 A_2 \int\limits_{\omega_h(x)} \frac{d\eta}{\eta^{\alpha_2} |x - s - \eta|^{\alpha_1''}}.$$

Енді $|x - s| = r$ $(x - s = r \cdot \theta, |\theta| = 1)$ белгілеулерін енгізіп және интегралдағы айнымалыларды $r = r\xi, d\eta = r^n d\xi$ етіп ауыстырсақ,

$$|K_3(x,s)| \le A_1 A_2 r^{m-\alpha_1-\alpha_2} \int\limits_{\omega_{h/2}(0)} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2} |\theta - \xi|^{\alpha_1}} =$$

$$= A_1 A_2 r^{m-\alpha_1-\alpha_2} \left(\int\limits_{|\xi| \le 2} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2} |\theta - \xi|^{\alpha_1}} + \int\limits_{2 < |\xi| < \frac{h}{2}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2} |\theta - \xi|^{\alpha_1}} \right)$$

Бұл теңсіздіктің оң жағындағы бірінші интеграл $|\theta| = 1$ болғандықтан шектелген шама, яғни

$$\int\limits_{|\xi| < 2} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2} |\theta - \xi|^{\alpha_1}} \le A_6,$$

ал $|\xi| \ge 2$ болған кезде $|\theta - \xi| \ge |\xi| - |\theta| = |\xi| - 1 \ge \dfrac{|\xi|}{2}$ екенін ескеріп, екінші интегралды бағаласақ,

$$\int\limits_{2 \le |\xi| \le \frac{h}{2}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2} |\theta - \xi|^{\alpha_1}} \le 2^{\alpha_1} \int\limits_{1 \le |\xi| \le \frac{h}{2}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_1 + \alpha_2}} = 2^{\alpha_1} |S_1| \int\limits_1^{h/2} \rho^{m-1-\alpha_1-\alpha_2} dp \le \begin{cases} 2^{\alpha_1} |S_1| \left[\dfrac{h}{2} - 1 \right], & \alpha_1 + \alpha_2 > m \\ 2^{\alpha_1} |S_1| \ln\left(\dfrac{h}{2} \right), & \alpha_1 + \alpha_2 = m. \end{cases}$$

Міне, осы соңғы теңсіздіктерден (42) өрнегінің орынды екені шығады.

Салдар. Егер ядро әлсіз ерекшелікті болса,оның қайталанған ядролары қайсыбір (екінші) нөмерінен бастап шектелген болады.

Расында, $K(x,s) = \dfrac{H(x,s)}{|x - s|^{\alpha}}$, $0 \le \alpha \le m$ ядросының n қайталанушы ядросы, 2 лемма бойынша

$$|K_n(x,s)| \le \begin{cases} \dfrac{C_n}{|x - s|^{n\alpha - (n-1)m}}, & n\alpha - (n-1)m > 0, \\ C_m, & n\alpha - (n-1)m < 0 \end{cases}$$

түрінде бағаланады, мұндағы, C_n шектелген тұрақты шама. Әрине, бұл өрнек шектелген (егер $n \geq \left[\dfrac{m}{m-\alpha}\right]$) болса. Барлық уақытта жоғарғы (39) түріндегі ерекшелігі әлсіз ядролы (38) интегралдық теңдеуінің ядросы қайталанған $K_2(x,s)$ немесе $K_3(x,s)$, $K_4(x,s)$ ядроларымен ауысқан сол типтегі теңдеулерге келтіруге болады. Ол үшін (38) теңдеуіндегі x-ті s-пен, ал s-ті t-мен ауыстырып, одан кейін теңдеуді $\lambda K(x,s)$-ке көбейтіп, пайда болған өрнекті s бойынша интегралдап,

$$\lambda \int\limits_D K(x,s)\varphi(s)ds = \lambda \int\limits_D \left\{ \lambda \int\limits_D K(s,t)\varphi(t)dt \right\} K(x,t)ds + \lambda \int\limits_D f(s)K(x,s)ds$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеуден және (38) теңдігінен

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int\limits_D K_2(x,s)\varphi(s)ds + f_2(x)$$

екені шығады, мұндағы,

$$f_2(x) = f(x) + \lambda \int\limits_D K(x,s) f(s)ds.$$

Дәл осылай

$$\varphi(x) = \lambda^3 \int\limits_D K(x,s)\varphi(s)ds + f_3(x),$$

ал мұнда,

$$f_3(x) = f_2(x) + \lambda \int\limits_D K_2(x,s) f_2(s)ds,$$

міне, осылай жалғаса береді.

Бұл үдерісті шектелген санақты түрде қайталап, ядросы $K_n(x,s)$ шектелген, үзіліссіз болған Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуін аламыз. Демек, ерекшелігі әлсіз ядролы интегралдық теңдеуді регулиярлы ядролы интегралдық теңдеуге келтірдік.